

Тема: Диференціал функції та його застосування до наближених обчислень

Поняття диференціала взаємозв'язане з поняттям похідної, і є одним з фундаментальних в математиці. Сам термін "диференціал" (від латинського слова *differentia* – різниця) введений у математику Лейбніцом. Розглянемо виведення формули диференціалу.

Нехай маємо неперервну гладку функцію $y=f(x)$ на проміжку $[a;b]$. Тоді вона має похідну на ньому і вона виражається залежністю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Відношення приросту функції до відношення приросту аргументу рівне

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

або

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

де похибка прямує до нуля $\alpha \rightarrow 0$ якщо приріст аргументу прямує до нуля $\Delta x \rightarrow 0$, причому похибка обчислень α - нескінченно мала величина порядку Δx . Тому перший доданок $f'(x)\Delta x$ дає найбільший вклад та є головною частиною приросту функції, також він лінійний відносно приросту аргументу. Другий доданок при обчисленнях відкидають, а перший визначають при наближених обчисленнях та називають диференціалом функції $dy = f'(x)\Delta x$.

Диференціал незалежної змінної x рівний її приросту $dx = \Delta x$. Таким чином диференціал функції $dy = f'(x)dx$ рівний її похідній, помноженій на диференціал незалежної змінної.

За рахунок простоти обчислень диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ у фізиці, механіці, математиці. Будь-яка фізична величина протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини, що характеризує її, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну проводять доволі часто та називають лінеаризацією процесу.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛУ

Властивості диференціалу слідує із властивостей похідних.

1) $dC = 0$

2) $d(au \pm bv) = adu \pm bdv, (a, b = \text{const})$

$$3) d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$4) d(u \cdot v) = u dv + v du$$

$$5) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Розглянемо приклади із збірника задач Дубовика В.П., Юрика І.І. "Вища математика".

Приклад 1. Який приріст матиме функція $y = 2x^3 - 3x$ при переході незалежної змінної від $x_1=2$ до $x_2=2,01$? Яке значення відповідної лінійної головної частини? Знайти відношення другої величини до першої.

Р о з в ' я з а н н я :

Обчислимо приріст функції за формулою

$$\Delta y = y(x_2) - y(x_1);$$

$$y(x_2) = 2 \cdot 2,01^3 - 3 \cdot 2,01 = 10,211202,$$

$$y(x_1) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 = 10,$$

$$\Delta y = 10,2112 - 10 = 0,211202.$$

Визначимо значення лінійної головної частини функції. Для цього знайдемо похідну $y' = 2 \cdot 3x^2 - 3 = 6x^2 - 3$ та приріст аргументу $dx = \Delta x = x_2 - x_1 = 2,01 - 2 = 0,01$.

Підставимо в формулу диференціалу

$$dy = f'(x) dx = (6 \cdot 2^2 - 3) \cdot 0,01 = 0,21.$$

Знайдемо відношення диференціалу до приросту аргументу

$$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{0,21}{0,211202} = 0,994308766.$$

Отримали, що диференціал з точністю понад 99% наближає приріст функції.