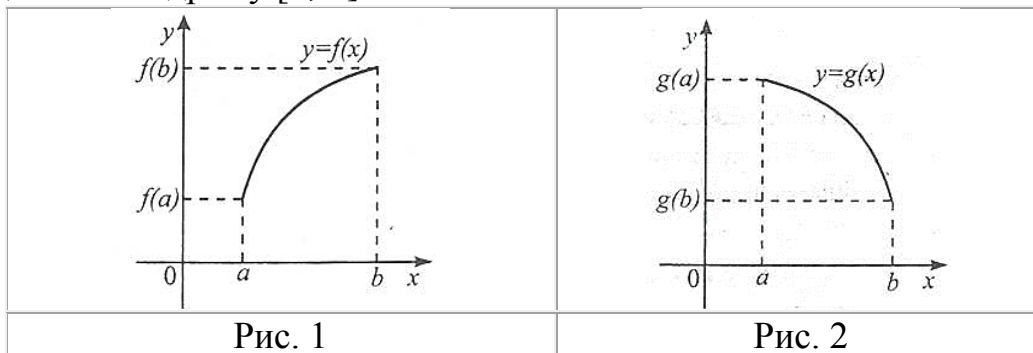


Тема: Найбільше і найменше значення функції на проміжку

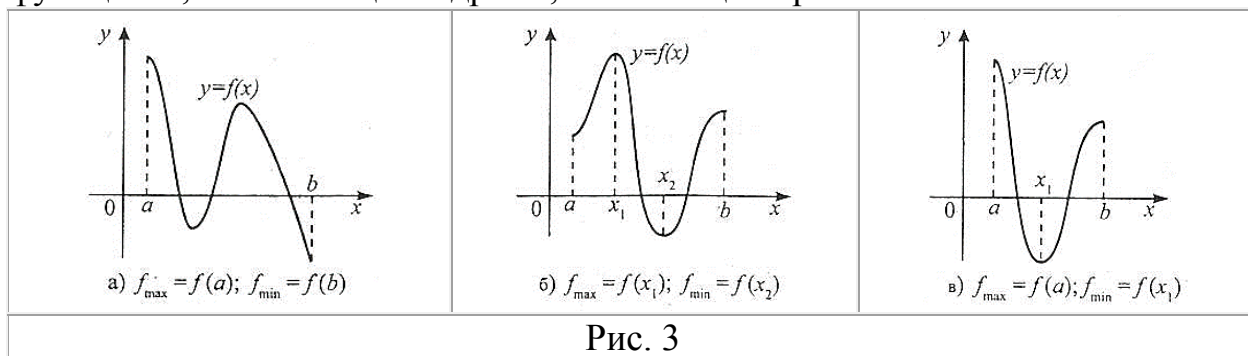
1) Зміст поняття найбільшого та найменшого значення функції на проміжку.

Розглянемо рис. 1 і 2, на яких зображено графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$, заданих на відрізку $[a; b]$.



Функція $y=f(x)$ зростає, а функція $y=g(x)$ спадає. На відрізку $[a; b]$ найменше значення функції $y=f(x)$ дорівнює $f(a)$, а найменше значення функції $y=g(x)$ дорівнює $g(b)$. Відповідно найбільші значення цих функцій на даному відрізку дорівнюють $f(b)$ та $g(a)$. Отже, якщо функція неперервна і зростає (спадає) на деякому відрізку, то найбільшого і найменшого значень функція набуває на кінцях цього відрізка.

Розглянемо рис. 3, на якому зображено графіки трьох функцій. Аналіз цих графіків свідчить, що найбільше і найменше значення функцій неперервних і диференційованих на відрізку $[a; b]$ досягаються цими функціями, або на кінцях відрізка, або в стаціонарних точках.



Отже, неперервна і диференційована функція на заданому відрізку набуває найбільшого і найменшого значень у стаціонарних точках або на кінцях відрізка.

2) Схема знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку.

Багато практичних задач зводяться до знаходження найбільших або найменших значень деяких функцій на певних проміжках. Застосування похідної до таких задач дає загальний метод пошуку таких значень.

При цьому важливу роль відіграє таке твердження: якщо функція неперервна на деякому проміжку, то серед її значень на цьому проміжку є найбільше і найменше.

Схема знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку така:

- Знайдіть похідну функції і її критичні точки;
- Знайдіть значення функції на кінцях проміжку;
- Знайдіть значення функції в критичних точках, які належать заданому проміжку;
- З усіх знайдених значень функції оберіть найбільше і найменше.

Для розв'язання **практичних задач** спочатку складають аналітичний вираз для тієї функції, за допомогою якої одна величина виражається через другу, після чого знаходять найбільше або найменше значення одержаної функції.

При цьому користуються такою схемою:

- Оберіть одну зі змінних (незалежну змінну) і складіть через неї функцію (залежну змінну), для якої знаходять найбільше або найменше значення;
- Знайдіть проміжок зміни незалежної змінної;
- Знайдіть похідну функції, яку склали;
- Прирівняйте похідну функції до нуля і знайдіть корені отриманого рівняння;
- Знайдіть точки, в яких похідна не існує;
- Знайдіть значення функції на кінцях проміжку зміни незалежної змінної і в точках, де похідна не існує або дорівнює нулю;
- Оберіть зі знайдених значень найбільше або найменше.

Зверніть увагу!

1) Точка, в якій функція набуває найбільше або найменше значення, не змінюється при наступних перетвореннях виразу, що задає функцію:

- Додавання числа;
- Множення на відмінне від нуля число, але при множенні на від'ємне число найбільше значення стає найменшим і навпаки;
- Піднесення до степеня з натуральним показником, якщо функція невід'ємна.

2) Якщо додатна функція набуває в деякій точці найбільшого значення, то функції протилежна й обернена в цій же точці набувають найменшого значення.

Відшукування максимумів та мінімумів – одне з поширених завдань при дослідженнях функцій.

Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$ набуває своїх найбільшого та найменшого значень, або в критичних точках (у точках, в яких похідна перетворюється в нуль чи не існує), що належать досліджуваному проміжку, або на його кінцях $x=a$, $x=b$.

На практиці знаходження максимумів та мінімумів подібне до відшукування локального екстремуму, тільки добавляються краї проміжку.

Можливі випадки коли максимуми та мінімуми функцій знаходяться в точках локального екстремуму, а можливі - на краях відрізка. Розглянемо ряд прикладів, щоб ознайомити Вас з методикою дослідження.

Приклад 1. Визначити найбільше та найменше значення функції на проміжку.

$$f(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2}; \quad x \in [-1; 3].$$

Розв'язування:

Функція визначена на всій множині дійсних чисел. Хоча вона і дробова, проте знаменник ніде не перетворюється в нуль. Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = \frac{-2x(4+x^2) - 2x(4-x^2)}{(4+x^2)^2} = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}.$$

Прирівняємо її до нуля та визначимо критичні точки

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Перевіримо знак похідної зліва та справа від знайденої точки

$$f'(-1) = -\frac{16 \cdot (-1)}{(4+1)^2} = \frac{16}{25} > 0;$$

$$f'(1) = -\frac{16 \cdot 1}{(4+1)^2} = -\frac{16}{25} < 0.$$

Похідна при переході через точку $x=0$ змінює знак з додатного "+" на від'ємний "-", отже вона є точкою локального максимуму. Знайдемо значення функції в точці $x=0$

$$f(0) = \frac{4-0}{4+0} = 1 \quad \text{та на краях відрізка} \quad f(-1) = \frac{4-(-1)^2}{4+(-1)^2} = \frac{3}{5}; \quad f(3) = \frac{4-3^2}{4+3^2} = -\frac{5}{13}.$$

Таким чином функція досягає максимуму в точці локального екстремуму $f_{\max}(0)=1$, а мінімуму на одному з країв відрізка $f_{\min}(3)=-5/13$.

Приклад 2. $f(x) = x - 2 \ln x, \quad x \in [1; e]$.

Розв'язування: На заданому проміжку функція визначена всюди, обчислимо її

похідну $f'(x) = 1 - \frac{2}{x}.$

З умови рівності похідної нулю знаходимо критичну точку

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Задана точка належить розглянутому відрізку. Знайдемо значення функції в критичній точці та на краях

$$f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1;$$

$$f(2) = 2 - 2\ln 2 = 0,6137;$$

$$f(e) = e - 2\ln e = e - 2 \approx 0,718.$$

Функція набуває максимуму і мінімуму в точках

$$f_{\max}(1)=1, f_{\min}(2)=0,6137.$$

Приклад 3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

Розв'язування: Функція визначена для всіх значень аргументу $D(f): x \in \mathbb{R}$.
Знайдемо похідну

$$f'(x) = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{x}}.$$

З виразу бачимо, що похідна відмінна від нуля на проміжку визначення, однак в точці $x=0$ вона не існує.

Обчислимо значення функції в підозрілих на екстремум точках

$$f(-2) = \sqrt[3]{2 \cdot (-2)^2} + 1 = 3;$$

$$f(0) = 1;$$

$$f(1) = \sqrt[3]{2} + 1 \approx 2,26.$$

Найбільше значення функція приймає в точці $f_{\max}(-2)=3$, а найменше значення в критичній точці $f_{\min}(0)=1$.

Приклад 4. $y = \sin(2x) - x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

Розв'язування: Синус функція визначена всюди, тому приступаємо до знаходження похідної

$$y' = 2\cos(2x) - 1.$$

Прирівняємо її до нуля та знайдемо критичні точки

$$y' = 2\cos(2x) - 1 = 0 \Rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2};$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

Знайдемо значення функції у всіх підозрілих на екстремум точках

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57;$$

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \approx -0,342;$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \approx 0,342;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \approx -1,57.$$

З отриманих значень випливає, що функція приймає максимум та мінімум на краях відрізка

$$y_{\max}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; \quad y_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

З наведених розв'язків можна зробити висновки, що головним в обчисленні є знання функцій та вміння диференціювати. Все решта зводиться до відшукування значень функцій в точках та аналізу результатів. Вивчайте властивості елементарних функцій, правила знаходження похідних, це Вам стане в нагоді при знаходженні екстремумів.