

Тема: Застосування похідної до розв'язання задач з фізики

1) Задачі фізики, що приводять до поняття похідної.

За допомогою диференціального числення було розв'язано багато задач теоретичної механіки, фізики та астрономії. Зокрема, використовуючи методи диференціального числення, вчені передбачили повернення комети Галлея, що стало тріумфом науки XVIII ст.

За допомогою цих методів математики у XVIII ст. вивчали властивості різних кривих, знайшли криву, по якій найшвидше падає матеріальна точка, навчилися знаходити кривину ліній.

І тепер поняття похідної широко застосовується у різних галузях науки та техніки.

Похідна – це математичне поняття, яке широко використовується при розв'язанні багатьох задач з математики, фізики та інших наук. Зокрема у фізиці похідна використовується для вивчення та дослідження різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Наведемо приклад дослідження фізичного процесу – механічного руху. Уявимо собі, що гоночний автомобіль рухається прямолінійно і нерівномірно по фінішній прямій і перетинає фінішну лінію (рис 1). Відразу після перетину фінішної лінії автомобіль не зупиняється відразу, а проїжджає ще деяку відстань. Оскільки рух автомобіля нерівномірний, то його швидкість у кожному положенні різна. Уявимо собі, що нам потрібно знайти швидкість автомобіля у момент перетину ним фінішної лінії, в точці A – миттєву швидкість в момент часу t - $\vec{v}_m(t)$.

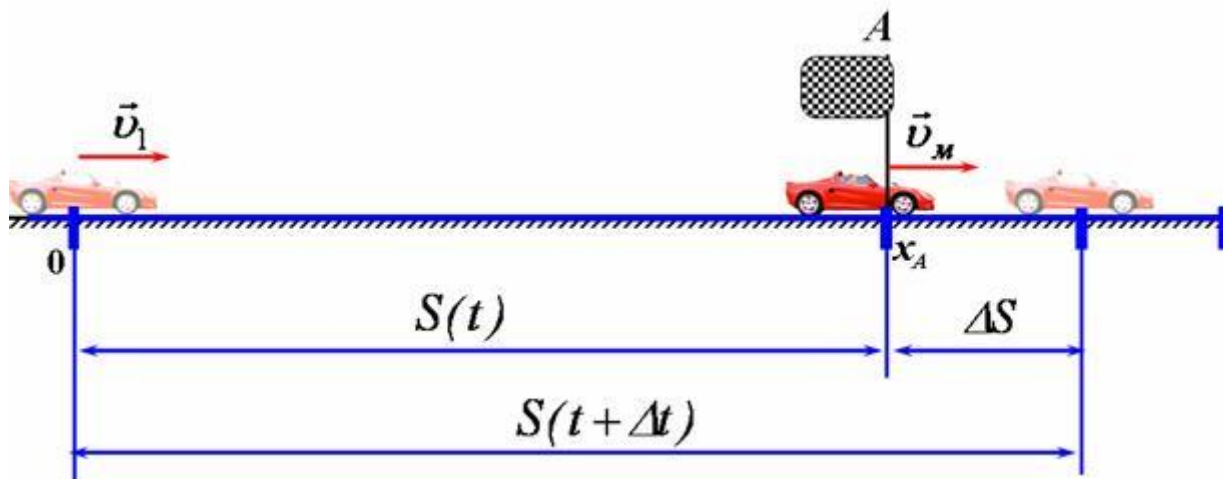


рис 1

Знаючи час руху автомобіля t та шлях $s(t)$, пройдений ним за цей час, ми можемо розрахувати *середню швидкість* автомобіля на деякій ділянці шляху, наприклад, на фінішній прямій (див рис 1). Але момент часу – це лише мить, яким же чином нам знайти швидкість автомобіля, якщо в цю мить автомобіль знаходиться в конкретному положенні з координатою x_A , і не здійснює жодних переміщень?

В цьому випадку використовують такий прийом. Розглянемо переміщення автомобіля за час t та за час $t + \Delta t$, де Δt - дуже малий проміжок часу. Знайдемо шлях пройдений автомобілем за час Δt - Δs , як різницю шляхів: шляху, який проїхав автомобіль за час $t + \Delta t$ - $s(t + \Delta t)$ та шляху, який проїхав автомобіль за час t - $s(t)$:

$$\Delta s(t) = s(t + \Delta t) - s(t)$$

Потім знайдемо середню швидкість автомобіля на ділянці шляху Δs :

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

Оскільки швидкість автомобіля не може змінюватись стрибкоподібно (швидкість змінюється стрибком лише у випадку вибуху чи удару), то при дуже малих значеннях Δt швидкість тіла на ділянці шляху Δs суттєво не зміниться. Тому можемо вважати, що середня швидкість на ділянці Δs наближено рівна миттєвій швидкості в точці A : $v_{cp} \rightarrow v_m$. Отже, середня швидкість залежить від часу Δt , чим менший проміжок часу Δt після моменту часу t ми візьмемо, тим точніше середня швидкість наближатиметься до миттєвої у момент часу t . Будемо зменшувати проміжок часу Δt таким чином, щоб $\Delta t \rightarrow 0$, в цьому випадку можна вважати, що середня швидкість дорівнюватиме миттєвій.

Тобто при різних Δt середня швидкість v_{cp} набуватиме різних значень, але всі ці значення наближатимуться (будуть дуже близькими за величиною) до величини миттєвої швидкості в точці A - v_m . З точки зору математики цей висновок записується так:

$$v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_{cp}) \quad (2)$$

Позначення $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ означає межу (або граничне значення), до якого прямуватиме величина v_{cp} , якщо $\Delta t \rightarrow 0$. З урахуванням (1) формулу (2) можна переписати ще й так:

$$v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \quad (3)$$

Вираз (3) слід читати і розуміти так: миттєва швидкість тіла в момент часу t - це межа (граничне значення), до якої прямує середня швидкість цього тіла на малому проміжку часу Δt , який минув відразу після моменту часу t .

У математиці, величини, які входять у вираз (3) називають так:

Δt - приріст часу;

Δs - приріст шляху (шлях пройдений тілом за приріст часу Δt);

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$ - похідна від приросту шляху по часу.

Зверніть увагу на те, що приріст шляху завжди функціонально залежить від часу. Наприклад, для рівномірного руху $s = v_0 t$, для рівноприскореного (який ми незабаром розглянемо) $s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t$ (де $a/2$ та v_0 - деякі константи). Тобто для всіх видів механічного руху завжди існує деяка залежність $s(t)$ або $x(t)$. Тоді вираз (3) можна переписати:

$$v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right), \text{ де } \Delta s = f(t)$$

Похідною називається границя (межа), до якої прямує відношення приросту функції Δs до приросту аргументу Δt , за умови, що приріст аргументу прямує до нуля $\Delta t \rightarrow 0$.

Поняття похідної вперше ввів Ньютон та Лейбніц у XVII ст. Математично описав і обґрунтував це поняття Коші у XIX ст. Цими науковцями було введено і спеціальне позначення похідної. Ньютон позначав похідну крапкою над величиною, тобто:

$$v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right) = \dot{s}(t)$$

Лейбніц запропонував позначати її так:

$$v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}$$

«d» - означало позначення приросту, латинську літеру «дельта» (Δ).

На сьогоднішній день прийнято позначати похідну *штрихом*:

$$v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right) = s'(t)$$

Узагальнюючи поняття похідної можна сказати, що в механіці та інших розділах фізики фізичний зміст похідної такий: похідна описує швидкість зміни якоїсь фізичної величини. Наприклад, якщо фізична величина описується деякою функцією від часу $f(t)$, то похідною є величина чи математична залежність, яка характеризує зміну цієї величини з часом (швидкість зміни), тобто $f'(t)$ - швидкість зміни фізичної величини, а $f'(t_1)$ в момент часу t_1 - миттєва швидкість зміни фізичної величини в момент часу t_1 .

2) Фізичних величин, які є похідними від інших величин.

Наведемо приклади фізичних величин, які є похідними від інших величин:

1. Як видно з наведеного вище прикладу про рух автомобіля, похідною від шляху (або координати) по часу є швидкість, тобто

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} \quad \text{або для координати:} \quad v = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

2. Як Ви пам'ятаєте сила електричного струму визначається за формулою $I = q/t$, тобто є швидкістю зміни електричного заряду, який проходить через поперечний переріз провідника. Тому похідною від величини електричного заряду по часу є значення сили електричного струму, тобто

$$I = q'(t) = \frac{dq}{dt}$$

3. Кутова швидкість – це бистрота зміни величини кута повороту радіус-вектора тіла: $\omega = \varphi/t$. Тому похідною від величини кута повороту радіус вектора по часу є кутова швидкість:

$$\omega = \varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

4. Потужність – це величина, яка характеризує швидкість виконання роботи $P = A/t$. Тому похідною від виконаної силою роботи по часу є потужність:

$$P = A'(t) = \frac{dA}{dt}$$

5. Лінійна густина стержня є похідною його маси як функції довжини стержня: $d(l) = m'(l)$

6. Сила струму є похідною кількості електричного заряду як функції часу: $J(t) = q'(t)$

7. Теплоємність є похідною кількості тепла як функції часу: $C(t) = Q'(t)$

Таким чином, щоб знайти швидкість зміни деякої фізичної величини слід знайти похідну рівняння, яке описує функціональну залежність цієї фізичної величини від часу, по часу.

3) Практичне використання похідної.

Як відомо, спосіб знаходження похідної впливає з її означення. Щоб знайти похідну функції $y = f(t)$ в деякій точці t , треба:

1) Надати значення t довільного приросту Δt і знайти відповідний приріст функції $\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$;

2) Потім знайти відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

3) Знайти границю цього відношення:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) = \frac{dy}{dt} = y'(t)$$

Якщо границя існує, то вона і дорівнює похідній $y'(t)$. Операція знаходження похідної від функції, наприклад, $y = f(t)$ називається диференціюванням.

Задача 1. Знайдемо, наприклад, швидкість тіла, яке рухається таким чином, що рівняння шляху від часу для нього має вигляд $s(t) = 5t$.

Розв'язання:

За означенням швидкості, у зазначеному рівнянні коефіцієнт «5» і є швидкістю тіла, яка вимірюється в одиницях СІ. Доведемо це, знайшовши похідну від рівняння $s = f(t)$ по часу:

1) Надамо часу деякого приросту Δt , $\Delta t \rightarrow 0$, тоді $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

2) Знайдемо відношення: $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

3) Знайдемо границю цього відношення, підставивши замість $s(t) = 5t$ ма $s(t + \Delta t) = 5 \cdot (t + \Delta t)$:

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{5(t + \Delta t) - 5t}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{5t + 5\Delta t - 5t}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{5\Delta t}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (5) = 5$$

Отже, швидкість тіла дорівнює 5 м/с, що і т.д.

Відповідь: 5 м/с

Задача 2. Знайдемо, наприклад, швидкість тіла, яке рухається таким чином, що рівняння шляху від часу має вигляд $s(t) = 2t^2$ в момент часу $t = 10$ с.

Розв'язання:

1) Надамо часу деякого приросту Δt , $\Delta t \rightarrow 0$, тоді $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

2) Знайдемо відношення: $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

3) Знайдемо границю цього відношення, підставивши замість $s(t) = 2t^2$ ма $s(t + \Delta t) = 2 \cdot (t + \Delta t)^2 = 2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) = 2t^2 + 4t\Delta t + 2\Delta t^2$:

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{2t^2 + 4t\Delta t + 2\Delta t^2 - 2t^2}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{4t\Delta t + 2\Delta t^2}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4t + 2\Delta t) = 4t$$

оскільки $\Delta t \rightarrow 0$, то і $(2\Delta t) \rightarrow 0$. Це означає, якщо шлях тіла змінюється за законом $s(t) = 2t^2$, то швидкість цього ж тіла буде змінюватись за законом $v(t) = 4t$.

Тепер знайдемо миттєву швидкість тіла в момент часу $t = 10$ с: $v(10) = 4 \cdot 10 = 40$ (м/с).

Відповідь: 40 м/с

Задача 3. Припустимо, що електричний заряд, який проходить через поперечний переріз провідника, змінюється за законом $q(t) = 3t^3 + 2t$. Знайдемо закон зміни сили струму у провіднику та силу струму в момент часу 2 с.

Розв'язання:

1) Надамо часу деякого приросту Δt , $\Delta t \rightarrow 0$, тоді $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

2) Знайдемо відношення:

3) Знайдемо границю цього відношення, підставивши

$$q(t) = 3t^3 + 2t \text{ ма}$$

$$s(t + \Delta t) = 3 \cdot (t + \Delta t)^3 + 2(t + \Delta t) =$$

$$\text{замість} = 3(t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3) + 2t + 2\Delta t = 3t^3 + 9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 + 2t + 2\Delta t$$

$$I = q'(t) = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(3t^3 + 9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 + 2t + 2\Delta t) - (3t^3 + 2t)}{\Delta t} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 + 2\Delta t}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9t^2 + 9t\Delta t + 3\Delta t^2 + 2) =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9t^2 + 2 + 9t\Delta t + 3\Delta t^2) = 9t^2 + 2$$

оскільки $\Delta t \rightarrow 0$, то і $(9t\Delta t + 3\Delta t^2) \rightarrow 0$. Це означає, якщо величина заряду змінюється за законом $q(t) = 3t^3 + 2t$, то швидкість цього заряду (сила струму)

змінюватиметься за законом $I(t) = q'(t) = \frac{dq}{dt} = 9t^2 + 2$.

Підставивши у дане рівняння час $t_1 = 2 \text{ с}$ знайдемо миттєве значення сили струму: $I(2) = 9t^2 + 2 = 38 \text{ А}$

Відповідь: 38 А

Таким чином, застосування похідної до розв'язування фізичних задач досить широке. З фізичної точки зору, похідна характеризує швидкість зміни функції з часом. Похідна функції, яка описує фізичний процес, в конкретний момент часу – це миттєва швидкість даного процесу в цей момент часу.

Похідна застосовується скрізь, де є нерівномірне протікання процесу: це і нерівномірний механічний рух, і змінний струм тощо. Ми переконалися в важливості вивчення цієї теми, її ролі в дослідженні процесів науки і техніки, в можливості конструювання за реальними подіями математичних моделей і розв'язувані важливих життєвих задач.