

Тема: Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками.

Означення	Приклад
Довжина вектора - це довжина відрізка, що зображає цей вектор. Координатами вектора $\vec{a}$ називаються числа: $a_1 = x_2 - x_1,$ $a_2 = y_2 - y_1$ $a_3 = z_2 - z_1$ Абсолютною величиною (або модулем) вектора називається довжина відрізка, що зображає вектор. Абсолютна величина вектора з координатами a_1, a_2, a_3 дорівнює $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	Знайти довжину вектора $\vec{a} = \{2; 4; 4\}$. Розв'язок: $\vec{a} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ Знайти довжину вектора $\vec{a} = \{-1; 0; -3\}$. Розв'язок: $\vec{a} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$
Кут між векторами можна знайти через скалярний добуток векторів. Косинус кута між векторами дорівнює скалярному добутку векторів поділений на добуток модулів векторів: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$	Знайти кут між векторами $\vec{a} = \{3; 4\}$ та $\vec{b} = \{4; 3\}$ Розв'язок: знайдемо скалярний добуток векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$ Знайдемо модулі векторів: $ \vec{a} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ $ \vec{b} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ Знайдемо кут між векторами: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{24}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} \approx 0.96$ Тоді $\alpha \approx 16^\circ - 17^\circ$

Розв'язання прикладів.

Приклад 1 Дано чотири точки: A(2;7;-3), B(1;0;3), C(-3;-4;5), D(-2;3;-1).
Вкажіть серед векторів $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{DC}, \vec{AD}, \vec{AC}, \vec{BD}$ рівні вектори.

Р о з в ' я з о к

Рівні вектори мають відповідно рівні координати. Тобто треба знайти координати шуканих векторів і порівняти їх:

$$\begin{array}{ll} \vec{AB}: 1-2=-1; 0-7=-7; 3-(-3)=6; & \vec{AB}(-1;-7;6) \\ \vec{BC}: -3-1=-4; -4-0=-4; 5-3=2; & \vec{BC}(-4;-4;2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{DC}: -3-(-2)=-1; -4-3=-7; 5-(-1)=6; & \overline{DC}(-1;-7;6) \\ \overline{AD}: -2-2=-4; 3-7=-4; -1-(-3)=2; & \overline{AD}(-4;-4;2) \\ \overline{AC}: -3-2=-5; -4-7=-11; 5-(-3)=8; & \overline{AC}(-5;-11;8) \\ \overline{BD}: -2-1=-3; 3-0=3; -1-3=-4; & \overline{BD}(-3;3;-4) \end{array}$$

Відповідь: $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$; $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$

Приклад 2 Дано вектор $\vec{a}(1;2;3)$. Знайдіть колінеарний йому вектор з початком у точці A (1;1;1) і кінцем B на площині ху.

Р о з в ' я з о к

Знайдемо координати вектора $\overline{AB}$: $x-1$; $y-1$; $z-1$. $z=0$ (за умовою задачі точка B знаходиться на площині ху). Тобто $\overline{AB}(x-1;y-1;-1)$

З колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\overline{AB}$ дістаємо пропорцію (у колінеарних векторів відповідні координати пропорційні):

$$\begin{array}{l} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3} \\ \frac{x-1}{1} = \frac{-1}{3} \qquad \qquad \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3} \\ 3(x-1) = -1 \cdot 1 \qquad \qquad 3(y-1) = -1 \cdot 2 \\ 3x-3 = -1 \qquad \qquad 3y-3 = -2 \\ 3x = 2 \qquad \qquad 3y = 1 \\ x = 2/3 \qquad \qquad y = 1/3 \end{array}$$

Тобто точка B матиме координати $(2/3; 1/3; 0)$. А вектор $\overline{AB}$ матиме координати: $2/3-1=-1/3$; $1/3-1=-2/3$; -1 .

Відповідь: $\overline{AB}(-1/3;-2/3;-1)$

Приклад 3 Дано чотири точки A(0;1;-1), B(1;-1;2), C(3;1;0), D(2;-3;1). Знайдіть косинус кута φ між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$

Р о з в ' я з о к

План: 1) знайти координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; 2) скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між векторами.

$$\begin{array}{ll} 1) \overline{AB}: 1-0=1; -1-1=-2; 2-(-1)=3; & \overline{AB}(1;-2;3) \\ \overline{CD}: 2-3=-1; -3-1=-4; 1-0=1; & \overline{CD}(-1;-4;1) \end{array}$$

$$2) \overline{AB} \cdot \overline{CD} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}| \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}$$

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{18}} = \frac{10}{\sqrt{252}} = \frac{5}{\sqrt{63}}$$

Відповідь: $\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{63}}$

1. Під яким кутом перетинаються координатні прямі в просторі?
А) під острим кутом;
Б) під прямим кутом;
В) під тупим кутом;
Г) під розгорнутим кутом.
2. Як називають точку перетину координатних прямих?
А) початок всіх початків;
Б) середина;
В) початок координат;
Г) роздільник.
3. Як називаються $(x; y; z)$ для точки у просторі?
А) координати точки;
Б) числа у просторі;
В) числа для точки;
Г) показники точки.
4. Установити відповідність між віссю і її назвою?
А) Ох 1) аплікат
Б) Оу 2) абсцис
В) Oz 3) ординат
5. Накреслити прямокутну тривимірну систему координат і визначити в ній точки: А $(1; 4; 3)$; С $(0; 0; 3)$.