

Тема: Рівняння і нерівності з параметром

Згадаємо задачу про фазанів та кроликів, що ми розглядали на минулому занятті:

Дехто підійшов до клітки, в якій побачив фазанів і кроликів. Спочатку він порахував голови. Їх було 15. А потім порахував лапки. Їх було 42. Скільки кроликів було в клітці?

При розв'язанні задач в математиці часто виникає необхідність в тому, щоб два рівняння або нерівності виконувались одночасно. Тоді їх об'єднують в систему.

	Кролики	Фазани
Голови	x	y
Лапки	$4x$	$2y$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 4x + 2y = 42 \end{cases}$$

$$y = 15 - x$$

$$4x + 2 \cdot (15 - x) = 42$$

$$4x + 30 - 2x = 42$$

$$2x = 42 - 30$$

$$x = 12/2 = 6$$

$$y = 15 - 6 = 9$$

Відповідь: Кроликів було 6, фазанів 9.

Уявіть, що ми захотіли самі скласти умови аналогічної задачі для уток і поросят і почали підставляти довільні числа голів і лап. Як ви гадаєте, ми можемо взяти будь-які числа, щоб скласти таку задачу?

Чи міг дехто нарахувати 15 голів і 55 лап? Або 30 голів і 50 лап?

1 варіант

2 варіант

$$4x + 2(15 - x) = 55$$

$$4x + 30 - 2x = 55$$

$$4x - 2x = 55 - 30$$

$$2x = 25$$

$$x = 12,5$$

$$4x + 2(30 - x) = 50$$

$$4x + 60 - 2x = 50$$

$$4x - 2x = 50 - 60$$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

Що вас насторожує в отриманих результатах? Ми не можемо отримати 12,5 або -5 кроликів. Ці відповіді протирічать здоровому глузду.

Щоб при складанні задач ми не отримали подібних результатів давайте розв'яжемо цю задачу в загальному вигляді, тобто без конкретних цифр, що означають кількість лап і голів. Кількість голів і лап позначимо літерами a і b відповідно.

$$4x + 2(a - x) = b$$

$$4x + 2a - 2x = b$$

$$4x - 2x = b - 2a$$

$$2x = b - 2a$$

$$x = \frac{b - 2a}{2}$$

кількість кроликів

$$a - \left(\frac{b}{2} - a\right) = a - \frac{b}{2} + a = 2a - \frac{b}{2} \text{ кількість фазанів}$$

$$\text{Відповідь: в клітці } \frac{b-2a}{2} \text{ кроликів та } 2a - \frac{b}{2} \text{ фазанів.}$$

*Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису рівняння чи нерівності входять також буквені коефіцієнти – параметри, то таке рівняння або нерівність називатимуться **рівнянням (нерівністю) з параметром**.*

При розв'язуванні рівнянь (нерівностей) з параметром можна користуватися таким орієнтиром.

Будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичне рівняння чи нерівність до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якийсь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або в ході розв'язування часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання та чим відрізняється один випадок від іншого. Щоб на таких схемах (чи в записах громіздких розв'язань) не загубити якусь відповідь, доцільно поміщати остаточні відповіді в прямокутні рамки. Зауважимо, що відповідь треба записати для всіх можливих значень параметра.

Приклад 1

Розв'яжіть нерівність зі змінною x : $3ax + 2 \geq x + 5a$.

Коментар

Задана нерівність є лінійною відносно змінної x , тому використаємо відомий алгоритм розв'язування лінійної нерівності:

1) переносимо члени зі змінною x в одну частину, а без x – у другу:

$$3ax - x \geq 5a - 2;$$

2) виносимо в лівій частині за дужки спільний множник x (тобто приводимо нерівність до вигляду $Ax \geq B$): $(3a - 1)x \geq 5a - 2$.

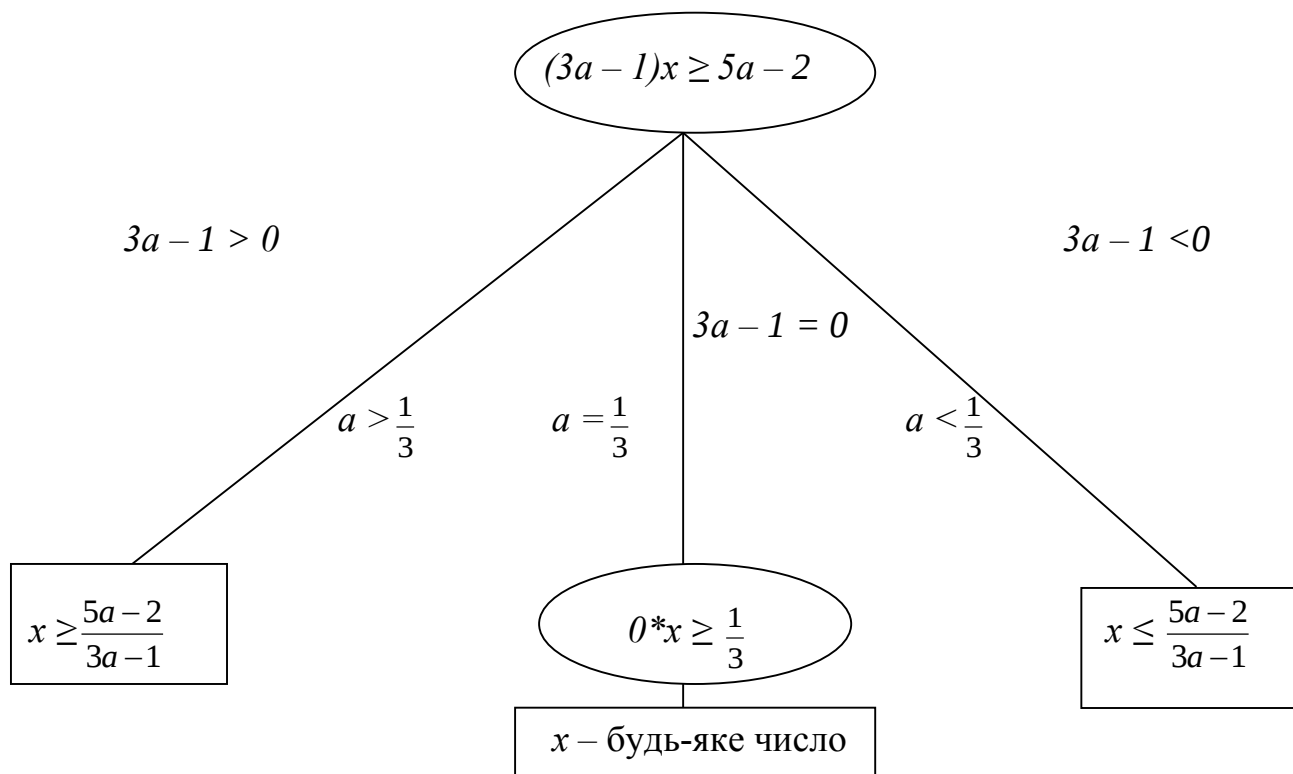
Для знаходження розв'язків останньої нерівності ми б хотіли поділити обидві її частини на $(3a - 1)$. Але якщо обидві частини нерівності поділити на додатне число, то знак нерівності не зміниться, а якщо на від'ємне, то знак нерівності необхідно змінити на протилежний. Крім того, слід урахувати, що на нуль ділити не можна. Отже, починаючи з цього моменту потрібно розглянути три випадки: $3a - 1 > 0$, $3a - 1 < 0$, $3a - 1 = 0$.

Наведені вище міркування можна наочно записати так:

$$3ax + 2 \geq x + 5a.$$

Розв'язання

• $3ax - x \geq 5a - 2$



Відповідь: 1) якщо $a > \frac{1}{3}$, то $x \geq \frac{5a - 2}{3a - 1}$; 2) якщо $a < \frac{1}{3}$, то $x \leq \frac{5a - 2}{3a - 1}$; 3) якщо $a = \frac{1}{3}$, то x – будь-яке число. •

При розв'язуванні більш складних рівнянь чи нерівностей слід пам'ятати, що рівняння з параметрами найчастіше розв'язують за допомогою рівносильних перетворень, а всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконують на ОДЗ заданого рівняння чи нерівності (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння чи нерівності). Тому, перш ніж записати відповідь, *потрібно обов'язково врахувати ОДЗ заданого рівняння чи нерівності.*

Приклад 2

Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-3} = 1 + \frac{a}{x}$, де x – змінна.

Коментар

Задані дробові вирази існують тоді і тільки тоді, коли знаменники заданих дробів не дорівнюють нулю, отже ОДЗ рівняння: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз $x(x - 3)$ – спільний знаменник дробів – і одержимо ціле рівняння, яке за умови $x(x - 3) \neq 0$ (тобто на ОДЗ заданого рівняння) рівносильне заданому: $x^2 = x(x - 3) + a(x - 3)$. З цього рівняння одержуємо $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$, тобто $ax - 3x = 3a$. Тоді $(a - 3)x = 3a$.

Для того щоб знайти значення змінної x , хотілося б поділити обидві частини рівняння на $(a - 3)$, але при $a = 3$ довелося б ділити на 0, що не

можливо. Отже, починаючи з цього моменту, потрібно розглянути два випадки.

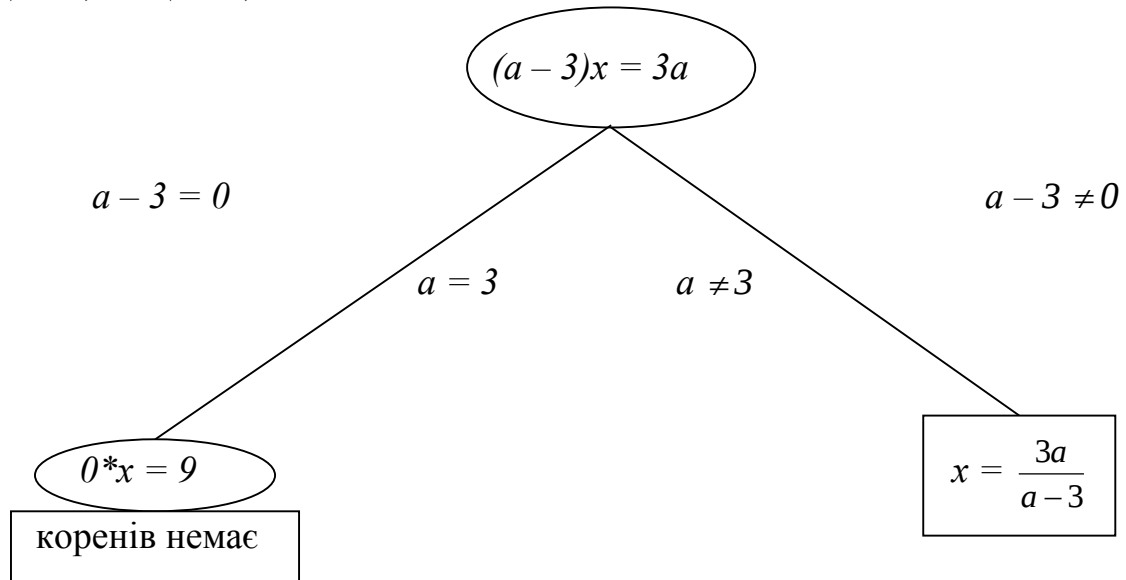
Розв'язання відповідно до наведених вище міркувань можна наочно записати у вигляді схеми.

$$\frac{x}{x-3} = 1 + \frac{a}{x}$$

Розв'язання

• ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

$$x^2 = x(x-3) + a(x-3), x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a, ax - 3x = 3a,$$



З'ясуємо при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ рівняння, тобто при яких значеннях a одержуємо $x = 3$ та $x = 0$.

$$\frac{3a}{a-3} = 3, \text{ тоді } 3a = 3(a-3), 3a = 3a - 9 - \text{розв'язків немає. Отже, при}$$

всіх значеннях a корінь $\frac{3a}{a-3}$ не дорівнює 3.

$\frac{3a}{a-3} = 0$, тоді $a = 0$. Отже, при $a = 0$ маємо $x = 0$ - сторонній корінь (не входить до ОДЗ), тобто при $a = 0$ задане рівняння не має коренів.

Відповідь: 1) при $a = 3$ і $a = 0$ коренів немає;

2) при $a \neq 3$, $a \neq 0$ $x = \frac{3a}{a-3}$ •

Приклад 3

Розв'яжіть рівняння $\frac{ax-1}{x-a} = \frac{4}{x}$ відносно змінної x .

Коментар

Будемо виконувати рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ (знаменники дробів не дорівнюють нулю). Якщо далі обидві частини рівняння помножити на добуток виразів, що стоять у знаменниках дробів (і який не дорівнює нулю на ОДЗ рівняння), то одержимо рівняння

$ax^2 - 5x + 4a = 0$, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого). Але останнє рівняння буде квадратним тільки при $a \neq 0$, тому для його розв'язування слід розглянути два випадки ($a = 0$ і $a \neq 0$). Якщо $a \neq 0$, то для дослідження

одержаного квадратного рівняння потрібно розглянути ще три випадки: $D = 0$, $D < 0$, $D > 0$ і в кожному з них перевірити, чи входять знайдені корені до ОДЗ, чи ні. При $D = 0$ зручно використати, що значення кореня відповідного квадратного рівняння збігається з абсцисою вершини параболи $y = ax^2 - 5x + 4a$, тобто $x = x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2a}$. Розглядаючи випадок $D > 0$, слід пам'ятати також про попереднє обмеження:

$$a \neq 0.$$

Оскільки корені рівняння (1) записуються достатньо громіздкими формулами (див. розв'язання), то замість підстановки одержаних коренів в обмеження ОДЗ підставимо «заборонені» значення x у рівняння (1) і з'ясуємо, при яких значеннях параметра a ми отримаємо значення x , які не входять до ОДЗ, а потім перевіримо отримані значення параметра.

Розв'язання

- ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq a$. На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:
 $ax^2 - x = 4x - 4a$,

$$ax^2 - 5x + 4a = 0. \quad (1)$$

1. Якщо $a = 0$, то з рівняння (1) одержуємо $x = 0$ — не входить до ОДЗ, отже, при $a = 0$ коренів немає.

2. Якщо $a \neq 0$, то рівняння (1) — квадратне. Його дискримінант $D = 25 - 16a^2$. Розглянемо три випадки:

1) $D = 0$, тобто $25 - 16a^2 = 0$, $a = \pm \frac{5}{4}$. Тоді рівняння (1) має одне значення кореня

$$x = \frac{5}{2a}.$$

Якщо $a = \frac{5}{4}$, то корінь $x = 2$ рівняння (1) входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.

Якщо $a = -\frac{5}{4}$, то корінь $x = -2$ рівняння (1) теж входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.

2) $D < 0$, тобто $25 - 16a^2 < 0$, отже, $a < -\frac{5}{4}$ або $a > \frac{5}{4}$. Тоді рівняння (1) не має коренів.

3) $D > 0$, тобто $25 - 16a^2 > 0$, отже, $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$, але $a \neq 0$. Тоді рівняння (1) має два корені

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a^2}}{2a}. \quad (2)$$

З'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто при яких значеннях a одержуємо $x = 0$ і $x = a$.

Підставляючи в рівняння (1) $x = 0$, одержуємо $a = 0$, але при $a = 0$ задане рівняння не має коренів.

Підставляючи в рівняння (1) $x = a$, одержуємо $a^3 - 5a + 4a = 0$, тобто $a^3 - a = 0$,

$a(a^2 - 1) = 0$. Тоді $a = 0$ (задане рівняння не має коренів), або $a = \pm 1$.
Перевіримо ці значення a . При $a = 1$ ОДЗ записується так: $x \neq 0, x \neq 1$. Із формули коренів (2)

маємо $x_1 = 4$ (входить до ОДЗ) і $x_2 = 1$ (не входить до ОДЗ). Отже, при $a = 1$ задане рівняння має тільки один корінь $x = 4$.

При $a = -1$ ОДЗ записується так: $x \neq 0, x \neq -1$, а із формули коренів (2) отримаємо: $x_1 = -4$ (входить до ОДЗ) і $x_2 = -1$ (не входить до ОДЗ). Отже, при $a = -1$ задане рівняння має тільки один корінь $x = -4$.

Таким чином, формулу коренів (2) можна використовувати, якщо

$$-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}, \text{ тільки при } a \neq 0 \text{ і } a \neq \pm 1.$$

Відповідь: 1) якщо $a = \frac{5}{4}$, то $x = 2$;

2) якщо $a = -\frac{5}{4}$, то $x = -2$;

3) якщо $a = 1$, то $x = 4$;

4) якщо $a = -1$, то $x = -4$;

5) якщо $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right)$, то $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a^2}}{2a}$;

6) якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ або $a = 0$, то коренів немає. ●