

Тема: Задачі, які приводять до поняття інтегралу. Інтегральні суми.

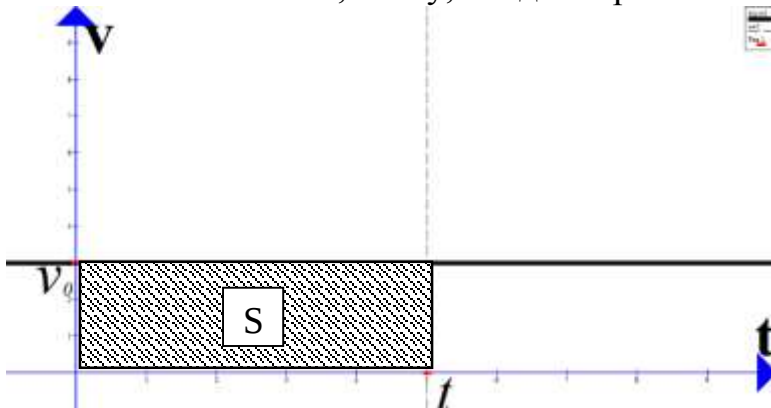
Математика вивчає різноманітні зв'язки між величинами. Найважливіший приклад таких зв'язків є механічний рух. Ми вже багато разів зверталися до прикладу руху матеріальної точки. Між координатою точки (положенням) і її швидкістю є відомий зв'язок, що лежить в основі математичного аналізу: швидкість є похідною від пройденого шляху за часом.

$$v = S'(t) = \frac{dS}{dt} - \text{механічний зміст похідної.}$$

Сама операція знаходження похідної називається диференціюванням. Обернена задача – знаходження координати точки за її швидкістю – розв'язується за допомогою іншої математичної операції – що називається інтегруванням.

Перш ніж навчимося розраховувати інтеграл, розглянемо їх геометричний зміст.

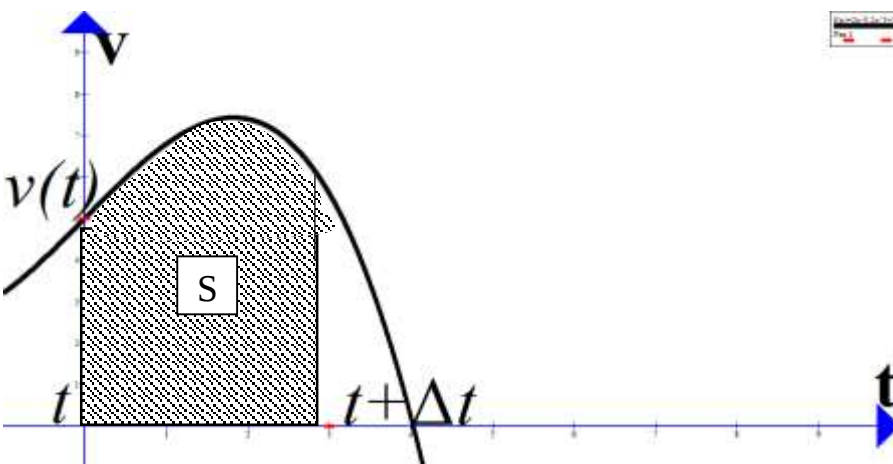
Почнемо, знову, з задачі про механічний рух.



Нехай точка рухається зі сталою швидкістю $v = v_0$. Графіком швидкості в системі координат $(t; v)$ буде пряма паралельна осі t . Якщо вважати, що в початковий момент часу $t=0$, точка знаходилась в початку координат, то її шлях S , що точка пройде за час t , розраховується за формулою $S = v_0 t$.

Величина $v_0 t$ представляє з себе площу прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис, і двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна розрахувати як площу під графіком швидкості.

Якщо рух нерівномірний, то швидкість можна вважати постійною на



маленьких відрізках. Якщо швидкість міняється за законом $v = v(t)$, то шлях, пройдений за час $[t; t + \Delta t]$ приблизно виразиться добутком $v(t) \cdot dt$, а на графіку – це площа прямокутника зі сторонами dt та $v(t)$.

Точні значення шляху за час $[t; t + \Delta t]$

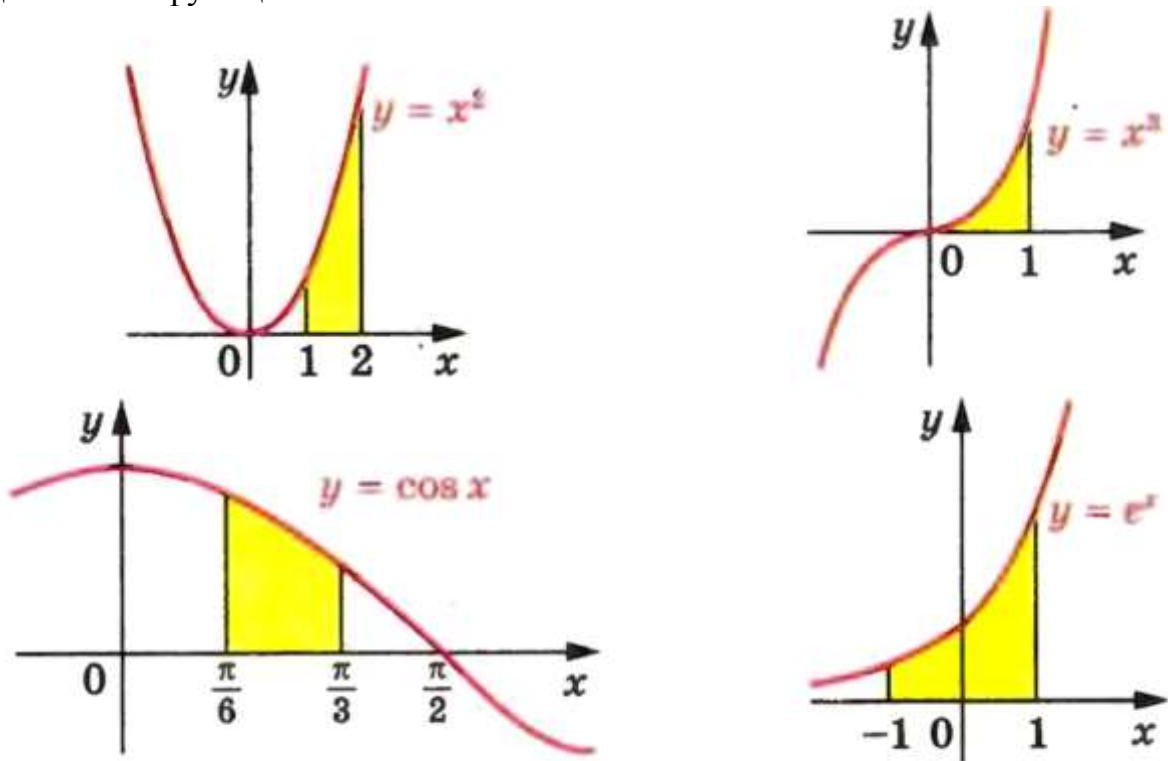
дорівнює площі криволінійної трапеції.

Коротко про інтеграл можна сказати:

Інтеграл – це площа

Нехай на координатній площині дан графік додатної функції, що задана на відрізку $[a;b]$. **Підграфіком** (або **криволінійною трапецією**) називається фігура, обмежена графіком функції f , прямими $x=a$ та $x=b$ і віссю абсцис.

Можна утворити криволінійні трапеції за допомогою різноманітних відомих вам функцій.



Нехай додатна функція f , визначена на скінченному відрізку $[a;b]$. *Інтегралом від функції f на відрізку $[a;b]$ називається площа її підграфіка.*

Отже, інтеграл – це площа. Якщо ми навчимося розраховувати площі довільних фігур, то зможемо розрахувати і інтеграли, а тим самим і багато фізичних величин.

Спосіб розрахунку площі, про який піде мова, уходить коренями в глибоку древність. Ще в III ст. до н.е. Архимед розраховував площу параболічного сегменту за допомогою винайденого їм «Методу вичерпування», який через 2 тис. років був перетворений в метод інтегрування.

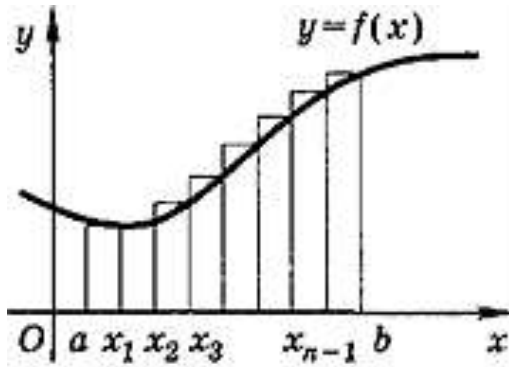
Проілюструємо цей метод на простому прикладі. Припустимо, що нам треба знайти об'єм лимона, що має неправильну форму, і тому використати якусь відому формулу об'єму ($V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V_{\text{куб}} = a^3$) неможна.

За допомогою зважування ($\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}$) знайти об'єм також важко, тому що щільність лимона в різних частинах різна. Що тоді можна зробити? Поступимо наступним чином: поріжемо лимон на тоненькі дольки. Кожну

дольку приблизно можна вважати циліндриком, радіус основ якого можна виміряти. Об'єм такого циліндра легко порахувати за готовою формулою $V = \pi R^2 H$.

Додавши об'єми всіх цих маленьких циліндрів (дольок) ми отримаємо приблизне значення об'єму всього лимона.

Чим тонше ми зможемо розрізати лимон, тим більш точне значення об'єму ми отримаємо.



Застосуємо аналогічну процедуру що до розрахунку площі підграфіка. Нехай дано підграфік функції $f(x)$ на $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{n-1}$ на n рівних відрізків: $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$.

Побудуємо на першому з цих відрізків прямокутник висоти $f(x_1)$, на другому — прямокутник висоти $f(x_2)$, ... , на n -му — прямокутник висоти $f(b)$. У результаті дістанемо східчастий багатокутник, складений з n прямокутників. Нехай основа кожного з побудованих прямокутників дорівнює Δx тоді площа усього східчастого багатокутника

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(b).$$

Суми такого вигляду називають *інтегральними сумами*.

Уявимо, що розбиття відрізка $[a; b]$ робимо на такі малі частини, що $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді площа ступінчастої фігури буде наближатись до площі підграфіка. Можна сказати, що площа підграфіка дорівнює границі інтегральних сум.

Не тільки задача про знаходження площі підграфіка, а й багато інших важливих прикладних задач приводять до обчислення границь подібних інтегральних сум. Тому для цього поняття введено спеціальну назву і позначення.

Границю інтегральної суми $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n)$, якщо $n \rightarrow \infty$, а $\Delta x \rightarrow 0$, називають **інтегралом** функції $f(x)$ від a до b . Її позначають символом $\int_a^b f(x) dx$ (читають: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс). Тут числа a і b - межі інтегрування, $\int$ - знак інтеграла, $f(x)$ - підінтегральна функція, x - змінна інтегрування.

Таким чином про інтеграл можна сказати так:

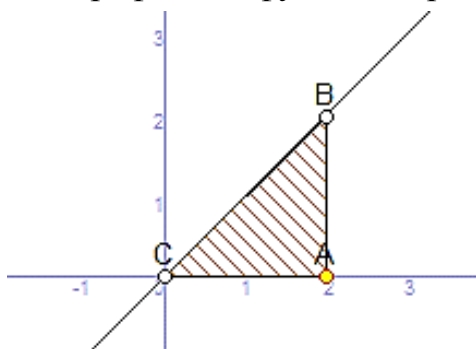
Інтеграл дорівнює границі інтегральних сум.

Приклад 1

Знайдіть площу підграфіка функції $y=x$ на $[0; 2]$.

Р о з в' я з о к :

Підграфік цієї функції - прямокутний трикутник з катетами 2 і 2. Його площа:



$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ (кв.од.)}$$