

Тема: Числові функції, способи їх задання та властивості.

В природі і житті відбуваються різноманітні процеси, які слугують прикладами явищ, у яких зміна одних величин спричиняє зміну інших. Тому ми і будемо розглядати такі залежності

Різнманітні процеси, що відбуваються в довкіллі, слугують прикладами явищ, у яких зміна одних величин спричиняє зміну інших. (Наприклад: Зміна часу викликає зміну часу доби чи пори року; Зміна кількості опадів викликає зміну рівня води в річках і океані; і т.д.)

Для вивчення того чи іншого явища потрібно встановити взаємозв'язок між величинами, які його описують, і дослідити його властивості. Такий взаємозв'язок у математиці задається за допомогою функцій.

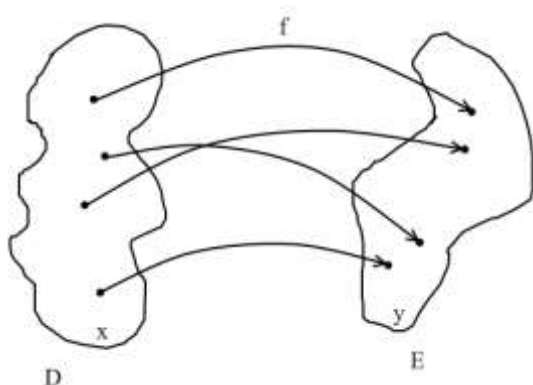
Наведемо приклад.

Площа круга $S(\text{см}^2)$ радіуса r (см) залежить від довжини радіуса і визначається формулою $S=\pi r^2$. За цією формулою для кожного значення $r>0$, можна знайти відповідне значення S . $r=2 \rightarrow S=4\pi$; $r=3 \rightarrow S=9\pi$ і т. д.

В курсі математика розглядаються числові функції.

Ми будемо користуватися таким означенням числової функції:

Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y . Записують цю відповідність так: $y = f(x)$



x – незалежна змінна (аргумент)

y – залежна змінна (функція)

f – функція

$f(x_0)$ – значення функції f у точці x_0

$D(f)$ – область визначення

$E(f)$ – область значень

Величину, яка змінюється незалежно, так і називають незалежною змінною, або аргументом, а другу – залежною змінною, або функцією.

Область визначення функції f – це множина тих значень, яких може набувати аргумент x . Вона позначається $D(f)$.

Область значень функції f – це множина, яка складається з усіх чисел $f(x)$ або y , де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.

Областю визначення функції, заданою формулою, вважають множину всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст.

Наприклад: Знайдіть область визначення і область значень функції $f(x)=\sqrt{x+1}$, та її значення $f(0)$, $f(5/4)$, $f(8)$ і з'ясуйте, чи існують значення функції в точках $x=-2$; $-3/2$.

Розв'язання:

З огляду на властивість квадратного кореня формула матиме зміст для всіх значень x , для яких $x+1 \geq 0$, або $x \geq -1$. Тобто $D(f)$ є множина $[-1; +\infty)$.

Значення арифметичного квадратного кореня невід'ємні тому область значень даної функції $y=f(x) \geq 0$, тобто $E(f)=[0; +\infty)$.

$$f(0) = \sqrt{0+1} = 1; f(5/4) = \sqrt{\frac{5}{4}+1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}; f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

Оскільки значення $x=-2; -3/2$ не належить області визначення функції, тобто $-2 \notin [-1; +\infty); -\frac{3}{2} \notin [-1; +\infty)$, то функція в цих точках не визначена.

Найчастіше функцію задають формулами. Ці приклади ми з вами розглянули. Але бувають й інші способи. Давайте їх розглянемо.

Способи задання функції:

1. За допомогою формули (аналітичний спосіб): необхідно указати область визначення і сформулювати закон (записати формулу), за яким кожному x з області визначення ставиться у відповідність y . Наприклад функція $y=x^2$.
2. За допомогою таблиці: табличний спосіб широко застосовується в практиці. Наприклад, метеорологи складають таблиці випавши осадків в різних пунктах земної кулі. У даному випадку в ролі значень аргументу виступають точки земної кулі, а кількість осадків в ролі значень функції.
3. За допомогою словесного опису: використовується коли формулу, за якою кожному x з області визначення функції ставиться у відповідність y , записати важко (або не можливо).
4. За допомогою графіків (геометричний спосіб): часто використовують в математиці для ілюстрації тих чи інших властивостей функцій. Також використовують в медицині при роботі електрокардіографа для отримання кривих, які зображають зміну електричних імпульсів, що виникає в серцевих м'язах.

Приклади розв'язання наступних завдань:

№ 1. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = \frac{5x-3}{2}; \quad \text{б) } y = \frac{2x}{x+1}; \quad \text{в) } y = \frac{3x+1}{x^2-3x+2}; \quad \text{г) } y = \frac{1}{2x-1} + 6\sqrt{x}$$

№ 2. Знайти $f(5)$, $f(-1)$, $f(1/3)$, $f(-2,1)$, якщо

$$\text{а) } f(x)=x^3; \quad \text{б) } f(x)=3x^2-5x+1$$

№ 3. Функцію задано формулою: $f(x) = -3x^2 + 2x$

а) знайдіть $f(1)$, $f(0)$, $f(1/3)$, $f(-2)$;

б) знайдіть значення аргументу при якому значення функції дорівнює $0; -1; -56$;

в) чи є правильною рівність: $f(-1)=5$; $f(2)=-8$.

Р о з в' я з к и :

№ 1

$$\text{а) } D(f)=R=(-\infty; +\infty);$$

$$\text{б) } x \neq -1 \Rightarrow D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty);$$

$$\text{в) } x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1; x \neq 2 \Rightarrow D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty);$$

$$\text{г) } x \neq \frac{1}{2}; x \geq 0 \Rightarrow D(f) = [0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty).$$

№ 2

$$\text{а) } f(5)=5^3=125; f(-1)=(-1)^3=-1; f(1/3)=(1/3)^3=1/9; f(-2,1)=(-2,1)^3=9,261;$$

$$\text{б) } f(5)=3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + 1 = 51; f(-1)=3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 1 = 9; f(1/3)=3 \cdot (1/3)^2 - 5 \cdot 1/3 + 1 = -1/3;$$

$$f(-2,1)=3 \cdot (-2,1)^2 - 5 \cdot (-2,1) + 1 = 24,73$$

№3

$$\text{а) } f(1) = -1; f(0) = 0; f(1/3) = 1/3; f(-2) = -16$$

$$\begin{array}{lll} \text{б)} & -3x^2 + 2x = 0 & -3x^2 + 2x = -1 & -3x^2 + 2x = -56 \\ & x=0; \quad x=2/3 & x_1=1; \quad x_2=-1/3 & x_1=14/3; \quad x_2=-4 \end{array}$$

$$\text{в) } f(-1) = 5 - \text{Hи}; \quad f(2) = -8 - \text{Hи}.$$