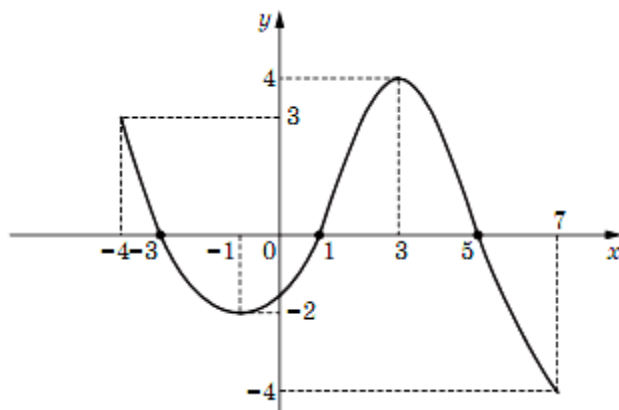


Тема: Парність і непарність числових функцій. Періодичність числової функції.

Графіком функції $y=f(x)$ називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x;f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата – це відповідне значення функції f у точці x

Або:

Графіком функції f називають множину точок $(x;y)$ координатної площини xOy , де $y=f(x)$, $x \in D(f)$



область визначення даної функції:

$$D(f)=[-4;7]$$

$$\text{область значень: } E(f)=[-4;4].$$

Значення, що приймає функція $f(x)$ в деякій точці x_0 множини M , на якій ця функція задана, називається **найбільшим (найменшим)** на цій множині, якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення.

Тобто для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ (або $[f(x) \geq f(x_0)]$). Іноді це записують так: $\max_M f(x) = f(x_0)$ (або $\min_M f(x) = f(x_0)$).

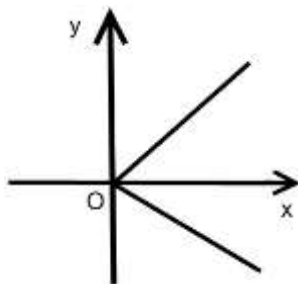
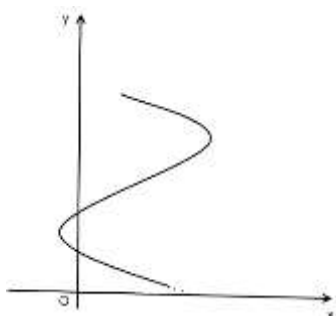
Для розглядуваної функції на її області визначення найбільше значення: $\max_{[-4;7]} f(x) = 4$, а найменше значення: $\min_{[-4;7]} f(x) = -4$

Зверніть увагу на значення функції при $x = -3$; $x = 1$; $x = 5$. При цих значеннях функція дорівнює нулю.

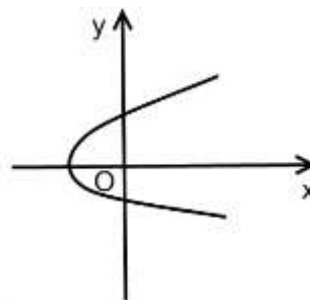
Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають **нулями функції**.

Так числа $-3, 1, 5$ – є нулями даної функції

За означенням функцію може задавати тільки така крива, яку кожна пряма $x=x_0$, $x \in D(f)$, паралельна осі Oy , перетинає **лише в одній точці** з ординатою $y_0=f(x_0)$. Тобто

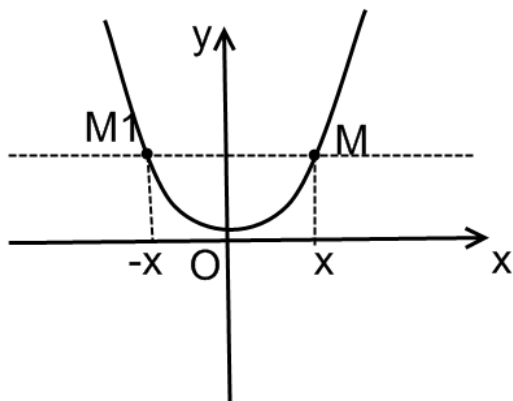


Не графіки функцій.



Парність, непарність, періодичність числових функцій

Розглянемо функції, область визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом з кожним числом x містить і число $-x$. Для таких функцій визначено поняття парності і непарності.

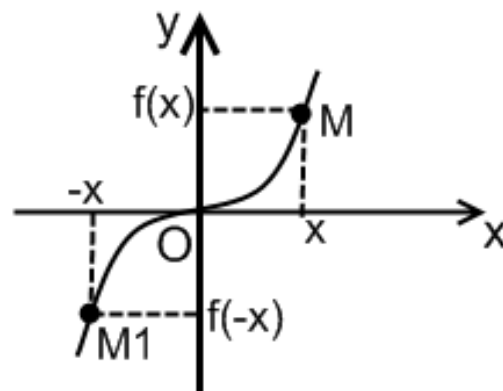


Функція називається парною, якщо для будь-якого x з його області визначення $f(-x)=f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ парна, то до її графіка разом з кожною т.М з координатами $(x;y)=(x;f(x))$ входить також і т.М₁ з координатами $(-x;y)=(-x;f(-x))=(-x;f(x))$. Точки М і М₁ розташовані симетрично осі Oy , тому й графік парної функції розміщений симетрично осі Oy .

Функція називається непарною, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x)=-f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ непарна. То до її графіка з кожною т.М з координатами $(x;y)=(x;f(x))$, входить також і т.М₁ з координатами $(-x;y)=(-x;f(-x))=(-x;-f(x))$. Точки М і М₁ розміщені симетрично відносно початку координат, тому й графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.



З вищесказаних означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути ні парною ні непарною.

Схема дослідження функції $y=f(x)$ на парність або непарність:

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$ і переконайтеся, що вона симетрична відносно т.О. Якщо ця умова не виконується, то така функція не може бути ні парною ні непарною.
2. Знайдіть значення функції $f(-x)$ і порівняйте його з $f(x)$. Якщо $f(-x)=f(x)$, $x \in D(f)$, то функція парна; якщо $f(-x)=-f(x)$, $x \in D(f)$, то функція непарна. Якщо жодна з цих умов не виконується, то функція не є ні парною ні непарною.

Багато процесів і явищ, що відбуваються в природі і техніці мають повторювальний характер. (Наприклад: рух Землі навколо Сонця, ріх маховика, зміна часу доби, і т.д.). Для опису такого роду процесів використовують так звані періодичні функції.

Функцію $y=f(x)$ називають періодичною, якщо існує число $T \neq 0$, таке що:

1) для кожного x з області визначення функції $x+T$ та $x-T$ теж належить області визначення;

$$2) f(x-T)=f(x+T)=f(x).$$

Число T називають **періодом** функції f .

Якщо T – період функції f , то її періодом також будуть числа m , $m \in \mathbb{Z}$

Розглянемо сказане на прикладі року:

- область визначення, наприклад (1900-2100р.);
- період T в данному випадку – 264 дні (через цей період сьогоднішня дата буде повторюватись);

- $(x-T)$ – це та сама дата в минулому році, і вона також належить області визначення;

- $(x+T)$ – це та сама дата в наступному році, і вона також належить області визначення;

№ 1. Визначте чи парна функція $f(x)=x^2-1$

1) $D(f)=\mathbb{R}$ – симетрична відносно т.О

2) $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$

$f(-x)=f(x)$ – тобто функція парна

№ 2. Визначте чи парна функція $f(x)=x^3$

1) $D(f)=\mathbb{R}$ – симетрична відносно т.О

2) $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

$f(-x)=-f(x)$ – тобто функція непарна

№ 3. Перевірити на парність функцію $g(x)=2x+1$

1) $D(f)=\mathbb{R}$ – симетрична відносно т.О

2) $g(-x)=2 \cdot (-x)+1=-2x+1 \neq g(x)$
 $\neq -g(x)$

Тобто функція ні парна ні непарна

№ 4. $u(x)=\sqrt{x+1}$

1) $D(u)=[-1; +\infty)$ – несиметрична відносно початку координат, тобто ця функція не буде ні парною ні непарною.

№ 5. $f(x)=0$

Графіком цієї функції є пряма – вісь Ox , яка є симетричною відносно осі Oy та відносно початку координат, тобто ця функція буде одночасно і парною і непарною.

№ 6. Відомо, що $f(7)=-16$. Знайдіть $f(-7)$, якщо функція $f \in$:

А) парною

Б) непарною

а) функція парна, тобто $f(-x)=f(x)$, отже $f(-7)=f(7)=-16$;

б) якщо функція непарна, то $f(-x)=-f(x)$, тобто $f(-7)=-f(7)=16$

№ 7. Функція $f \in$ парною. Чи може виконуватись рівність

а) $f(2) - f(-2) = 1$

б) $f(5) \cdot f(-5) = -2$

в) $f(1) : f(-1) = 1$

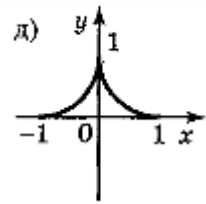
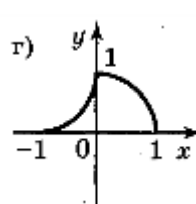
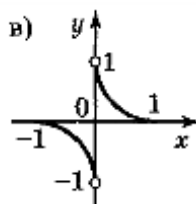
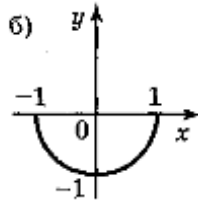
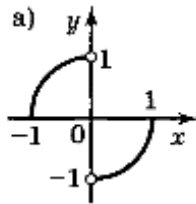
Якщо функція парна. То $f(-x) = f(x)$. Враховуючи це, отримуємо такі відповіді:

а) ні, бо $f(2) - f(2) \neq 1$;

б) ні, бо $f(5) \cdot f(5) \neq -2$;

в) так, то $f(1) : f(1) = 1$.

№ 8. Які із функцій, графіки яких показано на рисунку, є парними, а які непарними?



Відповідь: непарні — а), в); парні — б) д).

№ 9. Які із поданих функцій а) $y = x^3 + 2x^7$; б) $y = \sqrt{x+1}$; в) $y = |x|$;

г) $y = 3x^2 + x^6$; д) $y = x + 1$; е) $y = |x| + 1$ є парними, а які — непарними?

Відповідь: парні — в), г); е); непарні — а).